数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 222-228

On the asymptotic behavior of solutions of 4-dimensional Emden-Fowler differential systems

愛媛大・理　　内藤 学 (Manabu NAITO)

1. 序

この論文の内容は, 呉奮韜氏 (東北師範大学・数学系, 中国) との共同研究である.

ここでは, 次の 1 階 4 次元微分方程式系

$$
\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} u_1' = q_1(t)|u_2|^{\lambda_1}\operatorname{sgn} u_2 \\ u_2' = q_2(t)|u_3|^{\lambda_2}\operatorname{sgn} u_3 \\ u_3' = q_3(t)|u_4|^{\lambda_3}\operatorname{sgn} u_4 \\ u_4' = -q_4(t)|u_1|^{\lambda_4}\operatorname{sgn} u_1 \end{cases}
$$

を考える. ここで, $i = 1, 2, 3, 4$ に対して, λ_i は正の定数, $q_i(t)$ は区間 $[0, \infty)$ 上の連続関数で $q_i(t) > 0$ $(t \geq 0)$ と仮定する.

区間 $I \subset [0, \infty)$ で定義されたベクトル関数 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が I 上の (1.1) の解であるというのは, $\boldsymbol{u}(t)$ の各々の成分 $u_i(t)$ が I で定義された C^1 級関数で, 各 $t \in I$ において (1.1) が満たされることである. $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が無限区間 $[T, \infty)$, $T \geq 0$, 上の (1.1) の解であるとき, (1.1) における係数 $q_i(t)$ は $q_i(t) > 0$ $(t \geq 0)$ を満たすと仮定しているから, $\boldsymbol{u}(t)$ のある成分 $u_i(t)$ が非振動的 (nonoscillatory) ならば, 他の成分も非振動的であり, また, $\boldsymbol{u}(t)$ のある成分 $u_i(t)$ が振動的 (oscillatory) ならば, 他の成分も振動的であることがわかる. ここでは, 簡単のため, 前者のとき (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ は非振動的 (nonoscillatory) であるといい, 後者のとき (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ は振動的 (oscillatory) であるという.

我々は, 考察する解を無限区間 $[T, \infty)$, $T \geq 0$, 上のものに限定し, 振動理論の立場から (1.1) の解の全体の構造を探りたい. (1.1) の形の 1 階 4 次元微分方程式系は既に論文 [5] において

$$
\text{(1.2)} \qquad \int_0^\infty q_i(t)\,dt = \infty, \qquad i = 1, 2, 3
$$

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty q_1(t)\,dt = \infty, \quad \int_0^\infty q_2(t)\,dt < \infty, \quad \int_0^\infty q_3(t)\,dt = \infty, \\ \displaystyle\int_0^\infty q_1(t)\left(\int_t^\infty q_2(s)\,ds\right)^{\lambda_1} dt = \infty, \quad \int_0^\infty q_2(t)\left(\int_0^t q_3(s)\,ds\right)^{\lambda_2} dt = \infty \end{cases}$$

の場合が議論されているから，ここでは

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty q_1(t)\,dt = \infty, \quad \int_0^\infty q_2(t)\,dt < \infty, \quad \int_0^\infty q_3(t)\,dt = \infty, \\ \displaystyle\int_0^\infty q_1(t)\left(\int_t^\infty q_2(s)\,ds\right)^{\lambda_1} dt < \infty, \quad \int_0^\infty q_2(t)\left(\int_0^t q_3(s)\,ds\right)^{\lambda_2} dt < \infty \end{cases}$$

の場合を考察する.

微分方程式系 (1.1) についての結果を述べる前に，単独微分方程式

$$(1.5)\qquad (p(t)|x''|^\alpha \mathrm{sgn}\, x'')'' + q(t)|x|^\beta \mathrm{sgn}\, x = 0$$

を考えてみよう．ここで，α, β は正の定数，$p(t)$, $q(t)$ は $[0,\infty)$ 上の正値連続関数である．単独方程式 (1.5) は方程式系 (1.1) に含まれている．実際，変換

$$u_1 = x, \quad u_2 = x', \quad u_3 = p(t)|x''|^\alpha \mathrm{sgn}\, x'', \quad u_4 = (p(t)|x''|^\alpha \mathrm{sgn}\, x'')'$$

によって，単独方程式 (1.5) と

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = (p(t))^{-1/\alpha}|\,u_3|^{1/\alpha}\mathrm{sgn}\, u_3 \\ u_3' = u_4 \\ u_4' = -q(t)|\,u_1|^\beta \mathrm{sgn}\, u_1 \end{cases}$$

は同値であり，これは (1.1) の特別な場合である.

単独方程式 (1.5) は方程式

$$(1.6)\qquad (p(t)x'')'' + q(t)|x|^\beta \mathrm{sgn}\, x = 0$$

を拡張した形であるが，この (1.6) の振動理論については，草野-内藤の論文 [3, 4] によって，

$$(1.7)\qquad \int_0^\infty \frac{t}{p(t)}\,dt = \infty$$

$$\int_0^\infty \frac{t}{p(t)}\,dt < \infty \tag{1.8}$$

の場合に分けて考察すると理論がきれいにまとまるということがわかっている. 呉 [6] は

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{p(t)}\right)^{1/\alpha} dt = \infty$$

および

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{p(t)}\right)^{1/\alpha} dt = \infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^\infty \frac{t}{(p(t))^{1/\alpha}}\,dt = \infty$$

の場合に (1.5) を考察したが, これらの場合は (1.7) に対応している. また, 加茂-宇佐美 [1, 2] は

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{p(t)}\right)^{1/\alpha} dt < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^\infty \frac{t}{(p(t))^{1/\alpha}}\,dt < \infty$$

等の場合に (1.5) を考察したが, 丁度ここに書いた場合は (1.8) に対応している.

我々の方程式系 (1.1) について言えば, (1.2) と (1.3) は (1.6) の (1.7) の場合に対応しており, (1.4) は (1.6) の (1.8) の場合に対応している.

2. 結果

最初にこの論文の基礎となる定理を述べておく. それは, 微分方程式系 (1.1) の非振動解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ の成分の符号に関するものである. $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が (1.1) の解ならば, $-\boldsymbol{u}(t) = (-u_1(t), -u_2(t), -u_3(t), -u_4(t))$ も (1.1) の解であるから, 我々は非振動解 $\boldsymbol{u}(t)$ の第 1 成分 $u_1(t)$ は終局的に正値であるとして一般性を失わない:

$$u_1(t) > 0 \quad \text{for all large } t. \tag{2.1}$$

定理 2.1. 方程式系 (1.1) を条件 (1.4) の下で考える. $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が (1.1) の非振動解で (2.1) を満たしていれば, 次の 4 つのうちの 1 つが起こる: 十分大きなすべての t に対して

$$u_1(t) > 0, \quad u_2(t) > 0, \quad u_3(t) > 0, \quad u_4(t) > 0; \tag{2.2}$$

$$u_1(t) > 0, \quad u_2(t) > 0, \quad u_3(t) < 0, \quad u_4(t) > 0; \tag{2.3}$$

$$u_1(t) > 0, \quad u_2(t) > 0, \quad u_3(t) < 0, \quad u_4(t) < 0; \tag{2.4}$$

$$u_1(t) > 0, \quad u_2(t) < 0, \quad u_3(t) > 0, \quad u_4(t) > 0. \tag{2.5}$$

天下り的であるが, $[0,\infty)$ 上の関数 $A_i(t)$, $a_i(t)$ $(i=1,2,3,4)$ を次のように定める:

$$\begin{cases} A_1(t)=\int_0^t q_1(s)\,ds \\ A_2(t)=1 \\ A_3(t)=\int_0^t q_3(s)\,ds \\ A_4(t)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1(t)=\int_0^t q_1(s)\,ds \\ a_2(t)=1 \\ a_3(t)=1 \\ a_4(t)=\int_t^\infty q_4(s)\left(\int_0^s q_1(r)\,dr\right)^{\lambda_4} ds. \end{cases}$$

このとき, 我々は次の定理を得る.

定理 2.2. 方程式系 (1.1) を条件 (1.4) の下で考える. このとき, (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ で (2.2) を満たすものが存在すれば, $a_i(t)$ $(i=1,2,3,4)$ が well-defined である. (具体的には, 上記 $a_4(t)$ の定義式における右辺の積分が収束するということ.)

定理 2.3. 方程式系 (1.1) を条件 (1.4) の下で考える.

(i) (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ で

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u_i(t)}{A_i(t)}=\exists l_i\in(0,\infty),\quad i=1,2,3,4, \tag{2.6}$$

となるものは, (2.2) を満たす非振動解の中で maximal である, すなわち, (2.2) の条件を満たす任意の非振動解 $\boldsymbol{v}(t)=(v_1(t),v_2(t),v_3(t),v_4(t))$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v_i(t)}{u_i(t)}=\exists L_i\in[0,\infty),\quad i=1,2,3,4, \tag{2.7}$$

が成立する.

(ii) (2.6) を満たすような (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ が存在するための必要十分条件は

$$\int_0^\infty q_4(t)\left(\int_0^t q_1(s)ds\right)^{\lambda_4} dt<\infty \tag{2.8}$$

である.

定理 2.4. 方程式系 (1.1) を条件 (1.4) の下で考える.

(i) (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ で

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u_i(t)}{a_i(t)}=\exists l_i\in(0,\infty),\quad i=1,2,3,4, \tag{2.9}$$

となるものは, (2.2) を満たす非振動解の中で minimal である, すなわち, (2.2) の条件を満たす任意の非振動解 $\boldsymbol{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t))$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{v_i(t)}{u_i(t)} = \exists L_i \in (0, \infty], \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{2.10}$$

が成立する.

(ii) (2.9) を満たすような (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ が存在するための必要十分条件は

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty q_4(t) \left(\int_0^t q_1(s)\,ds\right)^{\lambda_4} dt < \infty \\ \displaystyle\int_0^\infty q_3(t) \left[\int_t^\infty q_4(s) \left(\int_0^s q_1(r)\,dr\right)^{\lambda_4} ds\right]^{\lambda_3} dt < \infty \end{cases} \tag{2.11}$$

である.

条件 (2.3) を満たすような解を考察するには, 次の関数 $B_i(t)$, $b_i(t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ が本質的である:

$$\begin{cases} B_1(t) = \displaystyle\int_0^t q_1(s)\,ds \\ B_2(t) = 1 \\ B_3(t) = -1 \\ B_4(t) = \displaystyle\int_t^\infty q_4(s) \left(\int_0^s q_1(r)\,dr\right)^{\lambda_4} ds; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(t) = 1 \\ b_2(t) = \displaystyle\int_t^\infty q_2(s) \left[\int_s^\infty q_3(r) \left(\int_r^\infty q_4(\sigma)\,d\sigma\right)^{\lambda_3} dr\right]^{\lambda_2} ds \\ b_3(t) = -\displaystyle\int_t^\infty q_3(s) \left(\int_s^\infty q_4(r)\,dr\right)^{\lambda_3} ds \\ b_4(t) = \displaystyle\int_t^\infty q_4(s)\,ds. \end{cases}$$

定理 2.5. 方程式系 (1.1) を条件 (1.4) の下で考える. このとき, (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ で (2.3) を満たすものが存在すれば, $b_i(t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ が well-defined である. また, (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ で (2.3) および

$$\lim_{t\to\infty} u_2(t) \quad \text{は正の有限値}$$

を満たすものが存在すれば, $B_i(t)$ $(i=1,2,3,4)$ が well-defined である.

定理 2.6. 方程式系 (1.1) を条件 (1.4) の下で考える.

(i) (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ で

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u_i(t)}{B_i(t)}=\exists l_i\in(0,\infty),\quad i=1,2,3,4, \tag{2.12}$$

となるものは, (2.3) を満たす非振動解の中で maximal である, すなわち, (2.3) の条件を満たす任意の非振動解 $\boldsymbol{v}(t)=(v_1(t),v_2(t),v_3(t),v_4(t))$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v_i(t)}{u_i(t)}=\exists L_i\in[0,\infty),\quad i=1,2,3,4, \tag{2.13}$$

が成立する.

(ii) (2.12) を満たすような (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ が存在するための必要十分条件は

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty q_4(t)\left(\int_0^t q_1(s)\,ds\right)^{\lambda_4}dt<\infty\\ \displaystyle\int_0^\infty q_3(t)\left[\int_t^\infty q_4(s)\left(\int_0^s q_1(r)\,dr\right)^{\lambda_4}ds\right]^{\lambda_3}dt<\infty\end{cases} \tag{2.14}$$

である.

定理 2.7. 方程式系 (1.1) を条件 (1.4) の下で考える.

(i) (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ で

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u_i(t)}{b_i(t)}=\exists l_i\in(0,\infty),\quad i=1,2,3,4, \tag{2.15}$$

となるものは, (2.3) を満たす非振動解の中で minimal である, すなわち, (2.3) の条件を満たす任意の非振動解 $\boldsymbol{v}(t)=(v_1(t),v_2(t),v_3(t),v_4(t))$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v_i(t)}{u_i(t)}=\exists L_i\in(0,\infty],\quad i=1,2,3,4, \tag{2.16}$$

が成立する.

(ii) (2.15) を満たすような (1.1) の解 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))$ が存在するための必要十分条件は

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty q_4(t)\,dt<\infty\\ \displaystyle\int_0^\infty q_3(t)\left(\int_s^\infty q_4(s)\,ds\right)^{\lambda_3}dt<\infty\end{cases} \tag{2.17}$$

条件 (2.4), (2.5) を満たすような解についても類似の結果を得ることができる. すなわち, (2.4) [resp. (2.5)] を満たすような (1.1) の解の中で maximal なものと minimal なものを特定することができ, かつ, maximal な解の存在の必要十分条件と minimal な解の存在の必要十分条件を $q_i(t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ についてのいくつかの積分条件の形で求めることができる. これらについての明確な記述は, 紙数の関係で省略する.

微分方程式系 (1.1) が非振動解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ をもつための必要十分条件を樹立すれば (非振動解 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ に符号条件 (2.2) – (2.5) や増大度条件 (2.6), (2.9) 等を一切仮定しないで！), 一応, (1.1) に対する振動理論が展開できたことになるが, この部分は機会をあらためて紹介したい.

参考文献

[1] K.-I. Kamo and H. Usami, Oscillation theorems for fourth-order quasilinear ordinary differential equations, Studia Sci. Math. Hungar., **39**(2002), 385–406.

[2] K.-I. Kamo and H. Usami, in preparation.

[3] T. Kusano and M. Naito, Nonlinear oscillation of fourth order differential equations, Canad. J. Math., **28**(1976), 840–852.

[4] T. Kusano and M. Naito, On fourth-order nonlinear oscillations, J. London Math. Soc. (2), **14**(1976), 91–105.

[5] T. Kusano, M. Naito and Wu F., On the oscillation of solutions of 4-dimensional Emden-Fowler differential systems, Adv. Math. Sci. Appl., **11**(2001), 685–719.

[6] Wu F., Nonoscillatory solutions of fourth order quasilinear differential equations, Funkcial. Ekvac., **45**(2002), 71–88.